

Δεύτερο τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις I

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια ακολουθιών:

(i) $\lim_n \left[n \cdot \operatorname{Im}(\sqrt[n]{1-i}) \right]$

(ii) $\lim_n \log \left(\left(2 + \frac{1}{n\pi} \right) e^{in\pi} \right)$.

Θέμα 2 (Σωστό ή Λάθος;)

(i) Αν $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών, τέτοια ώστε $z_n \rightarrow \infty$ και $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών, τότε $z_n + w_n \rightarrow \infty$.

(ii) Αν $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, τότε

$$z_n \rightarrow \infty \text{ αν.ν } |Re(z_n)| \rightarrow +\infty \text{ ή } |Im(z_n)| \rightarrow +\infty.$$

(iii) Το $A = \{z \in \mathbb{C} : z + |z| = 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{C} .

(iv) Το $B = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0 \text{ ή } Im(z) = 0\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C} .

Θέμα 3

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια συναρτήσεων.

(i) $\lim_{z \rightarrow 2020i} Re(z) \cos |z|$.

(ii) $\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(aRe^2(z) + bIm^2(z))}{z|z|} \right\}, a, b > 0$.

(iii) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^m}{e^{\sqrt[n]{|z|}}}, n, m \in \mathbb{N}$.

(vi) $\lim_{z \rightarrow 0} z \log(z)$ και $\lim_{z \rightarrow \infty} z \exp(z)$

Θέμα 4

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του πρωτεύοντος ορίσματος μιγαδικού αριθμού δεν είναι συνεχής στο σύνολο $(-\infty, 0]$. Στη συνέχεια αιτιολογήστε γιατί συνάρτηση αυτή δεν μπορεί (τουλάχιστον) να επεκταθεί συνεχώς στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$, δηλαδή στο 0.

(ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση της k -στης ρίζας μιγαδικού αριθμού είναι συνεχής στο σύνολο $(-\infty, 0]$.

(iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = \operatorname{Arg}(z) \sin(\operatorname{Arg}(z))$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!